ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ, 1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1) Να υπολογίσετε το άθροισμα καθεμιάς από τις παρακάτω σειρές.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5^k} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^{k-1}} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^k}{4^{k-2}} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k + 5^k}{7^k}.$$

2) Να εξετάσετε αν συγκλίνει ή αποκλίνει η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις

$$a_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-k} \qquad a_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-k^2} \qquad a_k = \frac{k^3}{2^k} \qquad a_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt[4]{k^3}}$$

$$a_k = \frac{3k^2 + 4k + 1}{3k^3 + 2k^2 + k + 1} \qquad a_k = \frac{k^2 + 3}{k^4 + 3k + 1}.$$

3) Να εξετάσετε αν συγκλίνει και αν συγκλίνει απόλυτα η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

(α) $a_k = (-1)^k \frac{k!}{k^k}$ (β) $a_k = (-1)^k \frac{k+3}{k^2 + 2k}$ (γ) $a_k = \frac{\cos(k\pi)}{\sqrt{k}}$ (δ) $a_k = \frac{\sin(2k + \sqrt{3})}{\sqrt{k^3}}$.

4) Χρησιμοποιώντας το κριτήριο λόγου (του D' Alembert) να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ όταν $a_k = \frac{x^k \cdot k!}{k^k}$ για τις διάφορες τιμές του x. [Για κάποια x για τα οποία δεν εφαρμόζεται άμεσα το κριτήριο λόγου, χρειάζεται ένα επιπλέον επιχείρημα.]

5) Υπολογίστε το άθροιμα της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$. [Υπόδειξη: Τηλεσκοπική.]

6) Αν $a_k \geq 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ είναι συγκλίνουσα, να δείξετε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ είναι επίσης συγκλίνουσα.

7) Χρησιμοποιώντας κατάλληλο αντιπαράδειγμα, δείξτε ότι η υπόθεση ότι $a_k \geq 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ στην προηγούμενη άσκηση δεν μπορεί να παραλειφθεί.

8) Αν $a_k \geq 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ δείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1 + k^2 a_k}$ είναι συγκλίνουσα.

9) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ συγκλίνει καθεμιά από τις παρακάτω σειρές.

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^k x^k \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4}{4^k} x^k \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^k}{k^2} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} x^k \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3 2 x^k}{k!}.$$

10) Να εξετάσετε αν συγκλίνει ή αποκλίνει η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ όταν

(α) $a_k = \sqrt[3]{k+1} - \sqrt[3]{k}$ (β) $a_k = \sqrt{k^2 + 1} - k$ (γ) $a_k = \frac{\sqrt{k+2} - \sqrt{k}}{k}$

(δ) $a_k = \left(k(e^{\frac{1}{k}} - 1) - \frac{1}{4}\right)^k$.

11) Να εξετάσετε για ποιες τιμές των παραμέτρων συγκλίνουν οι παρακάτω σειρές

$\sum_{k=1}^{\infty} \beta^k k^\beta$ (όπου $\beta \in \mathbb{R}$) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^p - k^q}$ (όπου $0 < q < p$) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{p^k - q^k}$ (όπου $0 < q < p$)

$\sum_{k=1}^{\infty} k^p \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$ (όπου $p \in \mathbb{R}$).